

Encontremos las raíces de una cuadrática

Dada $f(x) = ax^2 + bx + c$ nos proponemos hallar los valores de x para los cuales se anula la función, es decir aquellos x tales que el resultado al reemplazarlos en la f(x) dan cero. Es decir debemos resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Y tenemos una fórmula general de las raíces de una ecuación de segundo grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

donde a es el número que acompaña a la x^2
b es el número que acompaña a la x lineal (a la uno).
c es el término independiente, es decir el número que no tiene x.

Algunos ejemplos:

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$, $a= 1$ $b=3$ $c=-10$ *entonces al reemplazar en la fórmula tenemos:*

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-10)}}{2.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

tenemos dos soluciones una sumando 7
y la otra restando 7:

$$x = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

y

$$x = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Los ceros o raíces de la ecuación dada son **x = 2** y **x = - 5,**

Si pensamos en el gráfico de $f(x) = x^2 + 3x - 10$ los valores de x obtenidos son los puntos donde corta al eje "x".

Los ceros o raíces son simétricos respecto del eje de la parábola, lo cual significa que el eje pasa exactamente por la mitad de la distancia entre las dos raíces.

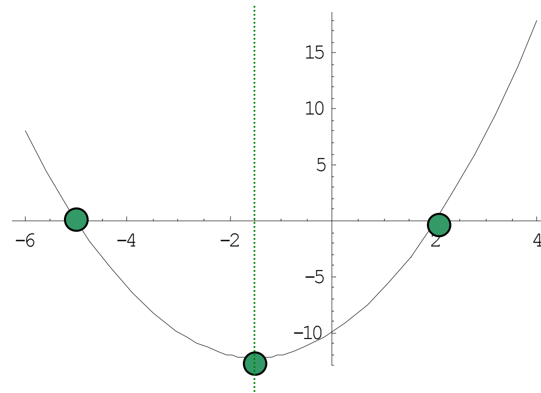
En nuestro ejemplo el ejemplo sería $x_v = \frac{2-5}{2} = -1{,}5$

El vértice es un punto que tiene como abscisa el mismo valor que el eje de simetría y como ordenada su imagen.

En nuestro ejemplo para obtener las coordenadas del vértice: x = -1,5 y la ordenada será f(-1,5);

$f(-1{,}5) = (-1{,}5)^2 + 3.(-1{,}5) - 10 = -12{,}25$. Luego el vértice es el punto: (-1,5 ; -12,25).

El gráfico es:



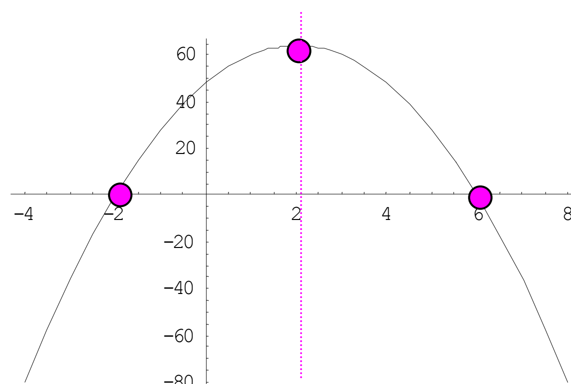
b) $-4x^2 + 16x + 48 = 0$, $a= -4$ $b= 16$ $c=48$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4.(-4).48}}{2.(-4)} = \frac{-16 \pm \sqrt{256+768}}{-8} = \frac{-16 \pm \sqrt{1024}}{-8} = \frac{-16 \pm 32}{-8}$$

luego $x = \frac{-16+32}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$ y $x = \frac{-16-32}{-8} = \frac{-48}{-8} = 6$

El eje de simetría es $x = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$ y la ordenada del vértice es $f(2) = -4.2^2 + 16.2 + 48 = -32$

Y el gráfico:





ACTIVIDAD 1

Resolvé las siguientes ecuaciones de segundo grado y luego construí sus gráficas:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $2x^2 - 12x + 16 = 0$

ACTIVIDAD 2

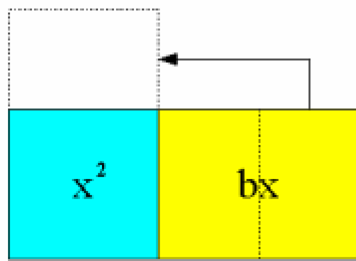
Encontrá las raíces de las funciones dadas en las actividades 1, 3 y 5 del tema Funciones cuadráticas.

Nota: **Interpretación geométrica.**

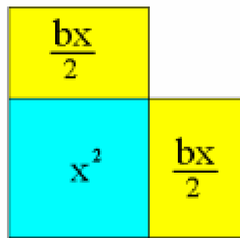
Siglos antes de resolver algebraicamente la ecuación de segundo grado, se encontraron soluciones utilizando un método geométrico, interpretando los términos como áreas, y distinguiendo varios casos pues no se conocían los números negativos (y menos aún las áreas negativas). Se sabe que los matemáticos babilonios alrededor del 400 a.C y los chinos en el 300 d.C usaban este método para resolver ecuaciones de segundo grado con raíces positivas. En torno al 300 d.C Euclides creó un método geómetrico más general (abstracto).

El caso más común es: $x^2 + bx = c$, con b y c positivos.

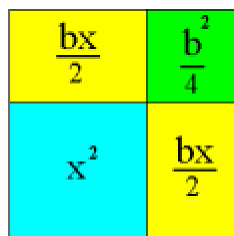
x^2 es obviamente el área de un cuadrado de costado x, y bx la de un rectángulo de costados *b* y *x*.



Se parte este en dos y se lo coloca alrededor del cuadrado, con el propósito de construir un cuadrado mayor.



Luego se añade un pequeño cuadrado de costado b/2, para completar el cuadrado.



Para conservar la igualdad, se debe hacer lo mismo con el área c.

El área del cuadrado es $c + \frac{b^2}{4}$, por lo tanto su costado mide la raíz cuadrada de esta cantidad. Restándole $\frac{b}{2}$, obtenemos el valor de x (en las figuras, b = 4, y x = 3).

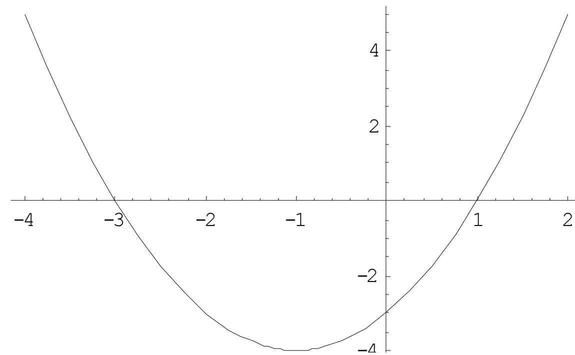
Este método no permite encontrar las soluciones negativas y, si son ambas positivas, solo se obtiene la que lleva la raíz con el signo +.



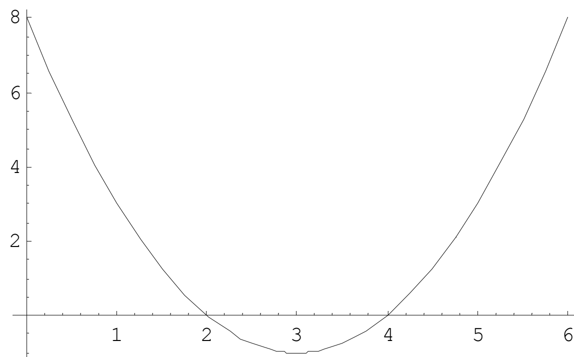
CLAVE DE CORRECCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Actividad 1

La ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$ tiene por raíces a x=1 y x =-3 y su gráfica es:



La ecuación $2x^2 - 12x + 16 = 0$ tiene por raíces x =4 y x =2 y su gráfica es:



Actividad 2

x = 0 es raíz de las ecuaciones $3x^2=0$, $-3x^2=0$, $\frac{1}{3}x^2=0$, $-\frac{1}{3}x^2=0$ y $x^2=0$

la ecuación $x^2+2=0$ y no tiene raíces, porque ningún número la anula

$x=\sqrt{2}$ y $x=-\sqrt{2}$ son las raíces de $x^2-2=0$

x = 2 es la raíz de $(x-2)^2=0$

x = -2 2s la raíz de $(x+2)^2=0$